

# عنوان: فصل سوم: آزمون فرض آماری

مدرس: دکتر سمیه عباسی

عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی اصفهان (خوراسگان)

دانشگاه آزاد اسلامی  
واحد اصفهان خوراسگان



## آزمون فرض

استفاده از آزمون زمانی است که علاوه بر سوال در تحقیق، فرضیه نیز داشته باشیم. بطور کلی هدف از آزمون آماری آن است که با توجه به اطلاعات بدست آمده از داده های نمونه، حدس خود را در مورد جامعه به طور قوی رد یا قبول کنیم.

### فرض صفر و فرض مقابل

$H_0$  : Null Hypothesis

$H_1$  : Alternative Hypothesis

فرض صفر  $H_0$

فرض مقابل  $H_1$

هر حکم یا ادعایی درباره توزیع یا پارامتر جامعه را یک فرض آماری گویند و چون ادعا ممکن است درست یا نادرست باشد، بنابراین دو فرض مکمل بوجود می آید:

**فرضیه صفر:** آنچه در جمعیت موجود است و درستی آن به اثبات رسیده است و به سادگی از آن نمی گذریم مگر با اطمینان بالایی درستی آن به مخاطره بیفتد و آن را با  $H_0$  نشان می دهیم.  
**فرضیه یک:** فرضیه مخالف فرض صفر است و آن را با  $H_1$  نشان می دهیم.

**نکته:** قاعده این است که همواره باید فرض صفر دربرگیرنده تساوی باشد، یعنی به صورت  $=$  یا  $\leq$  یا  $\geq$  بیان شود. در حالت کلی آزمونهای فرض به یکی از صورتهای زیر بیان می شود:

$$\begin{cases} H_0: \theta \geq \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} H_0: \theta \leq \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta = \theta_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

**مثال** فرضیه های پژوهشی زیر را در نظر گرفته و فرضیه های صفر و مقابل آنرا صورتبندی نمایید.  
 (۱) "نسبت مدیران مشارکت جو در سازمان بیش از ۷۰ درصد می باشد"

**ادعا:  $p > 0.7$**  ← چون علامت مساوی ندارد لذا در فرضیه مقابل قرار می گیرد. پس داریم

$$\begin{cases} H_0: p \leq 0.7 \\ H_1: p > 0.7 \end{cases}$$

→ نقیض ادعا  
 → ادعا

(۲) "میانگین معدل دانشجویان کلاس دست کم ۱۳ می باشد"

**ادعا:  $\mu \geq 13$**  ← چون علامت مساوی دارد لذا در فرضیه صفر قرار می گیرد. پس داریم:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 13 \\ H_1: \mu < 13 \end{cases}$$

→ ادعا  
 → نقیض ادعا

(۳) "میانگین بهره وری مدیران جوان در حد مدیران مسن می باشد"

ادعا: هر دو میانگین با هم برابرند

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$



(۴) "میانگین هزینه نگهداری یک اتومبیل ۲۰۰۰۰۰۰ تومان است"

ادعا:  $\mu = 200000$

$$\begin{cases} H_0: \mu = 200000 \\ H_1: \mu \neq 200000 \end{cases}$$



واحد رصفهان خوراگان



تمرین ۱) میانگین بهره وری خانم ها بیشتر از آقایان است.

تمرین ۲) میانگین IQ دانشجویان حداقل ۱۰۰ است.



**سطح معنی داری:** میزان خطایی است که ممکن است در رد کردن فرضیه صفر مرتکب شویم. به عبارتی احتمال رد کردن فرض صفر وقتی فرض صفر درست باشد و آن را با  $\alpha$  نشان می‌دهیم. بدیهی است سطح اطمینان  $1 - \alpha$  خواهد بود. به عبارت دیگر، روش کار این است که فرض  $H_0$  را بنفع  $H_1$  رد کنیم بشرط اینکه از یک آزمون آماری، مقداری بدست آوریم که احتمال وقوع آن مقدار با توجه به  $H_0$  برابر یا کمتر از یک احتمال بسیار کوچک باشد. این احتمال کوچک را سطح معنی داری گویند.





## خطاهای آزمون

در انجام هر آزمون آماری ممکن است دو نوع خطا صورت گیرد:

- ۱- خطای نوع اول ( $\alpha$ ) = احتمال رد فرض صفر است وقتی فرض صفر درست باشد که همان سطح معنی داری آزمون است.
- ۲- خطای نوع دوم ( $\beta$ ) = احتمال رد فرض یک است وقتی فرض یک درست باشد.

	گزینه های صحیح	
	غلط است	درست است
نتیجه گیری از نمونه		
رد کردن فرض صفر	خطای نوع اول $\alpha$	تصمیم درست است توان آزمون $1 - \beta$
رد کردن فرض یک	تصمیم درست است سطح اطمینان $1 - \alpha$	خطای نوع دوم $\beta$

واحد رصفهان خوراکان

## توان آزمون

توان یا قدرت آزمون عبارت است از احتمال رد کردن فرض صفر وقتی که در حقیقت فرض صفر نادرست باشد. روشن است که در هر استنباط آماری خطر ارتکاب هر یک از دو خطای نوع اول و دوم وجود دارد. در عمل پژوهشگر قبل از انجام آزمون آماری خطای نوع اول  $\alpha$  و تعداد نمونه  $n$  را مشخص می‌کند که خطای نوع دوم  $\beta$  نیز به طبع آن مشخص خواهد شد. از آنجا که بین  $\alpha$  و  $\beta$  رابطه معکوس وجود دارد، بدون توجه به حجم نمونه ( $n$ )، افزایش در مقدار  $\alpha$  باعث کاهش در مقدار  $\beta$  خواهد شد. لازم است که پژوهشگر به نوعی سازش که تعادل بین احتمال این دو خطا را به حد مطلوب برساند، دست یابد.

نکته

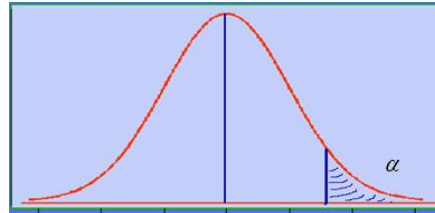
اگر محقق بخواهد که احتمال هر دو نوع خطا را کاهش دهد که به طور ضمنی افزایش توان آزمون را نیز در پی خواهد داشت، راهی جز افزایش حجم نمونه نخواهد داشت.

واحد رصفهان خوراکان

## آزمون فرض یک دامنه و دو دامنه

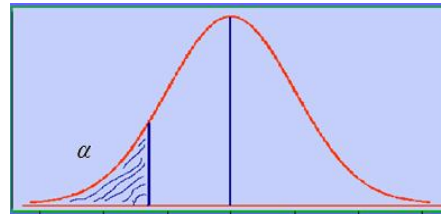
آزمون فرض را یک دامنه می نامیم، اگر فرض مقابل،  $H_1$  یک طرفه باشد. به عبارت دیگر، آزمون به یکی از دو صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$$



**آزمون یکطرفه راست:** در این نوع آزمون  $H_1$  به اندازه  $\alpha$  در دنباله راست توزیع نمونه گیری شاخص آزمون قرار دارد و سطح  $1 - \alpha$  در سمت چپ مربوط به  $H_0$  است.

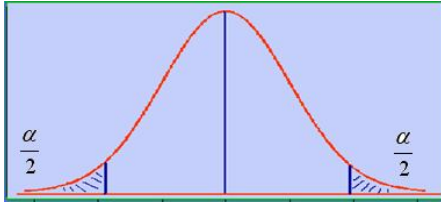
$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$$



**آزمون یکطرفه چپ:** در این نوع آزمون  $H_1$  به اندازه  $\alpha$  در دنباله چپ توزیع نمونه گیری شاخص آزمون قرار دارد و سطح  $1 - \alpha$  در سمت راست، مربوط به  $H_0$  است.

آزمون فرض را دو دامنه می نامیم، اگر فرض مقابل،  $H_1$  دو طرفه باشد:

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

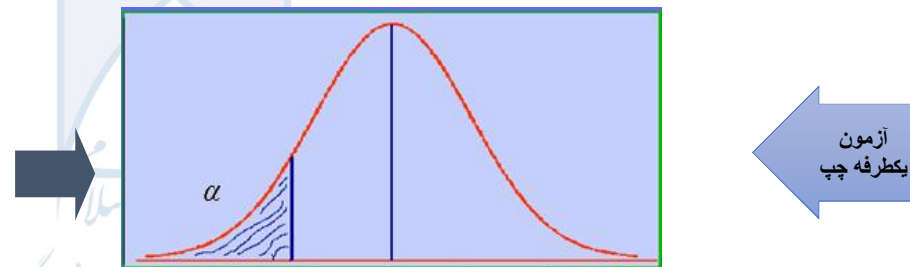


**آزمون دوطرفه:** در این نوع آزمون  $H_1$  به اندازه  $\frac{\alpha}{2}$  در دنباله چپ و به اندازه  $\frac{\alpha}{2}$  در دنباله راست توزیع نمونه گیری قرار دارد و سطح  $1-\alpha$  در وسط مربوط به  $H_0$  است.



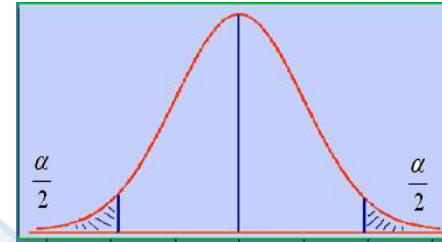
میانگین دستمزد کارکنان یک کارخانه کمتر از ۲۰۰ هزار تومان است.

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{cases}$$



## مردان و زنان تفاوت سطح هوشی ندارند.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_w = \mu_m \\ H_1 : \mu_w \neq \mu_m \end{cases}$$



آزمون  
دو طرفه

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 63 \\ H_1 : \mu > 63 \end{cases}$$

میانگین طول عمر در يك جمعیت ۶۳ سال است.  
فردی ادعا می‌کند این مقدار در سال گذشته افزایش داشته است.

آزمون  
یکطرفه راست

$$\begin{cases} H_0 : P = 0.26 \\ H_1 : P < 0.26 \end{cases}$$

نسبت افراد سیگاری در يك جمعیت ۲۶% است.  
محقق می‌خواهد بررسی کند آیا این نسبت اخیراً کاهش یافته است؟

آزمون  
یکطرفه چپ

واحد رصفهان خوراگان

## آزمون دو طرفه

$$\begin{cases} H_0: \mu = 3850 \\ H_1: \mu \neq 3850 \end{cases}$$

میانگین مصرف آب يك مجتمع مسكوني در هر ماه ۳۸۵۰ لیتر است.  
مدیر مجتمع مي خواهد بررسی کند آیا این میزان تغییر یافته است؟

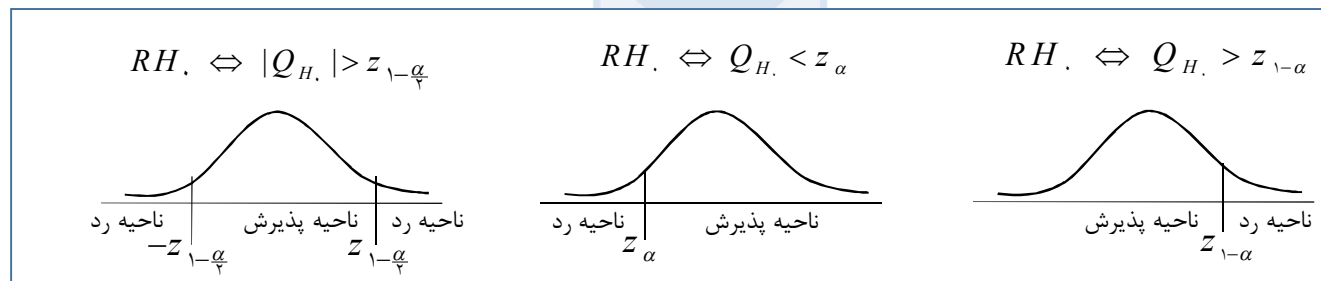
تمرین) حداکثر +۴ درصد از مشتریان شرکت راضی  
هستند.



تمرین) با اجرای طرح تصویب شده در هیات مدیره میانگین  
سود روزانه شرکت حداقل ۱۰ میلیون خواهد بود

## استراتژی رد فرض صفر

هنگامی می‌توان فرض صفر را رد کرد که داده‌های مورد بررسی با شرایطی که فرضیه صفر واقعاً صحیح است، مطابقت نداشته باشد. این کار با قرار گرفتن مقدار شاخص آماری آزمون در ناحیه رد، مورد تایید قرار می‌گیرد و ناحیه رد نیز بر اساس توزیع احتمال آن و با توجه به سطح معنی داری آزمون تعیین می‌شود.



واحد رصفهان خوراگان

## P-Value

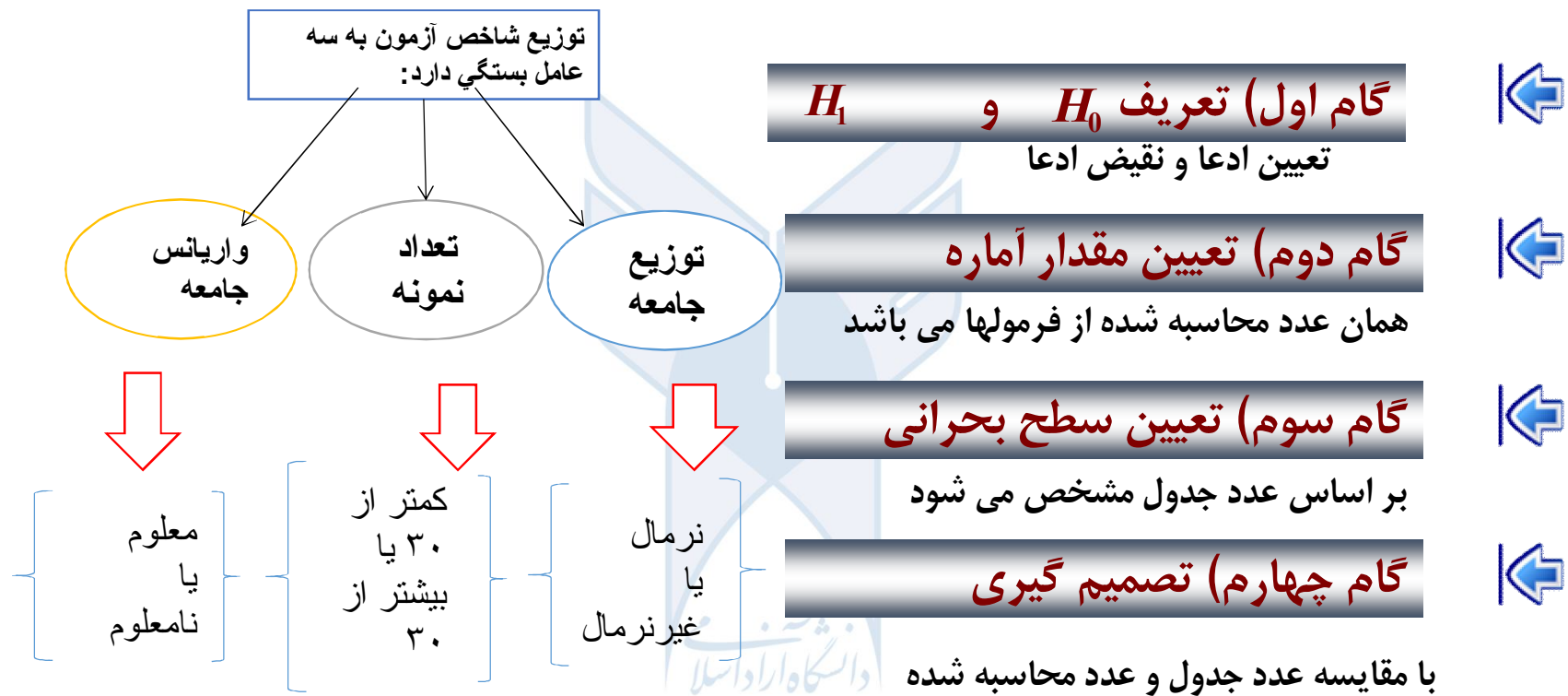
P-Value که آن را احتمال معنی داری برای يك آزمون نیز می‌گویند، کوچکترین مقداری است که می‌توان برای آلفا در نظر گرفت تا فرض صفر رد شود. از طرفی آلفا سطح خطایی است که محقق برای رد فرض صفر در ابتدای آزمون در نظر می‌گیرد ولی P-Value مقدار خطای محاسبه شده در رد فرض صفر است. مزیت محاسبه P-Value این است که اخذ تصمیم در مورد رد یا پذیرش فرض صفر را به محقق واگذار می‌کند. هر چند از قبل مقدار آن را معلوم کرده است ولی می‌تواند در مورد مقدار آن تجدید نظر کند. مثلاً در یک آزمون اگر مقدار خطای محاسبه شده برابر P-Value=0/04 باشد، فرض صفر با آلفای کمتر از این مقدار پذیرفته است ولی اگر محقق آلفا را بیشتر از این مقدار در نظر بگیرد، فرض صفر رد می‌شود.

**P-Value** معمولاً در نرم افزارهای تحلیل آماری مورد استفاده قرار گرفته و محاسبه می‌شود تا محقق با مشاهده آن بتواند در مورد رد یا پذیرش فرض صفر به صورت زیر تصمیم‌گیری نماید:

$$R H_1 \Leftrightarrow P - Value < \alpha$$



## مراحل عمومی آزمون فرضیه های آماری



## آزمون فرضیه آماری میانگین یک جامعه

استفاده از این آزمون زمانی است که فرضیه محقق در مورد میانگین یک جامعه باشد.  
به عنوان مثال قصد داشته باشد میانگین نمره عملکرد مدیران را در کل جامعه آماری مورد مطالعه قرار دهد.

مرحله اول) تعریف  $H_0$  و  $H_1$

حالت اول

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_0 \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_0 \end{cases}$$

حالت دوم

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu_x < \mu_0 \end{cases}$$

حالت سوم

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu_x > \mu_0 \end{cases}$$

مرحله دوم) محاسبه آماره آزمون یا  
ملاك آزمون

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

۱) جامعه نرمال  
و انحراف معیار  
آن معلوم

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$n > 30$

۲) جامعه نرمال و  
انحراف معیار آن  
نا معلوم

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

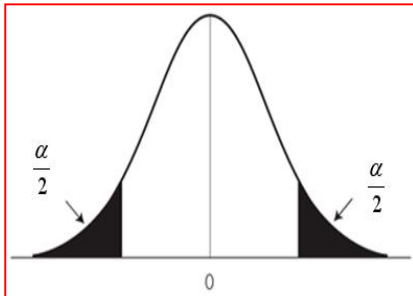
$n \leq 30$

**توجه:** در جوامع غیر نرمال چنانچه حجم نمونه بزرگتر از ۳۰ باشد آماره آزمون Z خواهد بود

مرحله سوم) تعیین ناحیه بحرانی

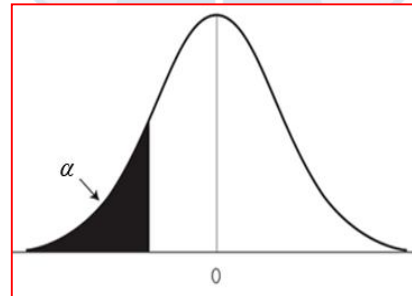
حالت اول

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_0 \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_0 \end{cases}$$



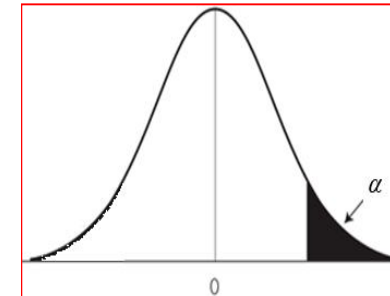
حالت دوم

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu_x < \mu_0 \end{cases}$$



حالت سوم

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu_x > \mu_0 \end{cases}$$



مرحله چهارم) تصمیم گیری

چنانچه ملاک آزمون در ناحیه بحرانی قرار بگیرد فرضیه صفر رد می شود.

## مثال

مثال (۱) پژوهشگری فرضیه خود را بدین شکل صورتبندی نموده است:  
”میانگین امتیاز عملکرد کارکنان در سازمان حداقل ۵۰ است“  
وی برای آزمون فرضیه فوق یک نمونه ۶۴ تایی به شکل تصادفی انتخاب کرده که میانگین و انحراف معیار آن ۴۵ و ۱۶ می باشد. چنانچه امتیاز عملکرد دارای توزیع نرمال باشد، در سطح خطای ۵٪ فرضیه فوق را آزمون نمایید.



## مثال

مثال ۳) پژوهشگری فرضیه خود را بدین شکل صورتبندی نموده است:  
”میانگین بهره وری کارکنان واحد انبار حداکثر ۶۵ واحد می باشد“  
ایشان یک نمونه تصادفی ۱۶ تایی انتخاب کرده که میانگین و انحراف معیار آن ۶۰ و ۱۰ است با فرض نرمال بودن سطح بهره وری کارکنان فرضیه محقق را در سطح اطمینان ۹۰ درصد آزمون کنید.



## مثال

مثال) وزن شیشه های شربت تولیدی یک شرکت داروسازی دارای توزیع نرمال با میانگین ۸۰ و واریانس ۹ گرم است. فردی مدعی است میانگین وزن شیشه ها کاهش یافته است. در یک نمونه ۲۰ تایی از این شیشه ها، میانگین وزن آنها ۷۸ به دست آمد. در سطح ۵٪ آیا ادعای فرد را می پذیرید یا رد می کنید؟



## تمرین



یک نمونه تصادفی به اندازه ۶ از طناب‌هایی که توسط یک کارخانه تولید می‌شوند را انتخاب کرده و مشخص شده است که میانگین تحمل وزن ۷۷۵۰ کیلوگرم و انحراف معیار ۱۴۵ کیلوگرم است. اگر صاحب کارخانه تولید کننده این نوع طناب مدعی باشد که طناب‌های تولید شده توسط آن کارخانه تحمل میانگین وزن ۸۰۰۰ کیلوگرم را دارند، با فرض نرمال بودن توزیع جامعه در مورد این ادعا چه اظهار نظری می‌توان کرد؟ سطح خطا را ۲ درصد در نظر بگیرید.





## تمرین



یک نمونه تصادفی به اندازه ۶ از طناب‌هایی که توسط یک کارخانه تولید می‌شوند را انتخاب کرده و مشخص شده است که میانگین تحمل وزن  $7750$  کیلوگرم و انحراف معیار  $145$  کیلوگرم است. اگر صاحب کارخانه تولید کننده این نوع طناب مدعی باشد که طناب‌های تولید شده توسط آن کارخانه تحمل میانگین وزن  $8000$  کیلوگرم را دارند، با فرض نرمال بودن توزیع جامعه در مورد این ادعا چه اظهار نظری می‌توان کرد؟ سطح خطا را  $2\%$  در نظر بگیرید.







## تمرین

پژوهشگری فرضیه خود را بدین شکل صورتبندی نموده است:  
”بطور متوسط تعداد قطعات معیوب در فرایند تولید ۲۵۰ عدد در روز می باشد“  
ایشان یک نمونه تصادفی ۱۶۰۰ تایی انتخاب کرده که میانگین و انحراف معیار آن ۳۰۰ و ۴۵ است با  
فرض نرمال بودن تعداد قطعات معیوب فرضیه محقق را در سطح اطمینان ۹۹ درصد آزمون کنید.



## آزمون فرضیه آماری نسبت موفقیت در جامعه

استفاده از این آزمون زمانی است که فرضیه محقق در مورد نسبت موفقیت یک جامعه باشد. و مقیاس های بکارگرفته شده از نوع مقیاس های کیفی باشند.

مرحله اول) تعیین فرض صفر و فرض یک

حالت اول

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$

حالت دوم

$$\begin{cases} H_0 : p \geq p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$$

حالت سوم

$$\begin{cases} H_0 : p \leq p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

مرحله دوم) محاسبه آماره آزمون یا ملاک آزمون

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

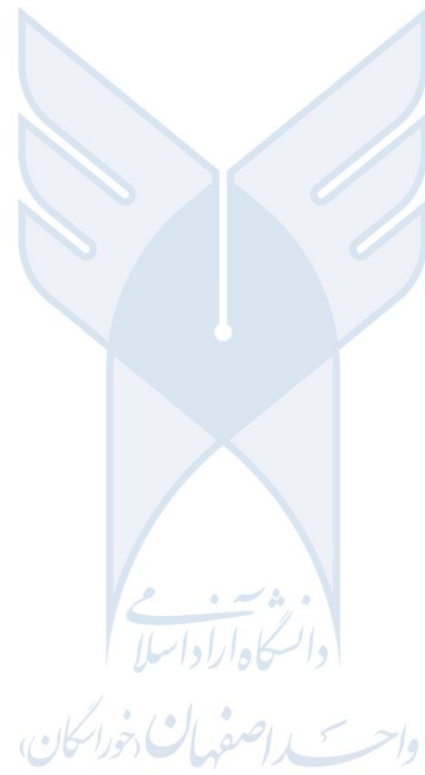
- مرحله سوم) تعیین ناحیه بحرانی (مشابه بخش قبل)

### مرحله چهارم) تصمیم گیری

مثال

سازنده یک ماده لکه گیری مدعی است که محصول او حداقل ۹۰ درصد هرگونه لکه ای را برطرف می کند. درباره این ادعا در سطح  $\alpha = 0.05$  چه می توانیم بگوییم در صورتی که این ماده فقط ۱۷۴ تا از ۲۰۰ لکه به تصادف انتخاب شده از لکه های روی لباسهایی را که به یک شرکت خشکشویی آورده شده اند پاک کرده باشد؟





مثال در یک دانشکده برآورد می شود که کمتر از ۲۵ درصد از دانشجویان دارای ماشین شخصی هستند. اگر از یک نمونه تصادفی ۹۰ تایی از دانشجویان، ۲۵ نفر صاحب ماشین شخصی باشند آیا برآوردمان درست بوده است؟ سطح معناداری ۳ درصد است.



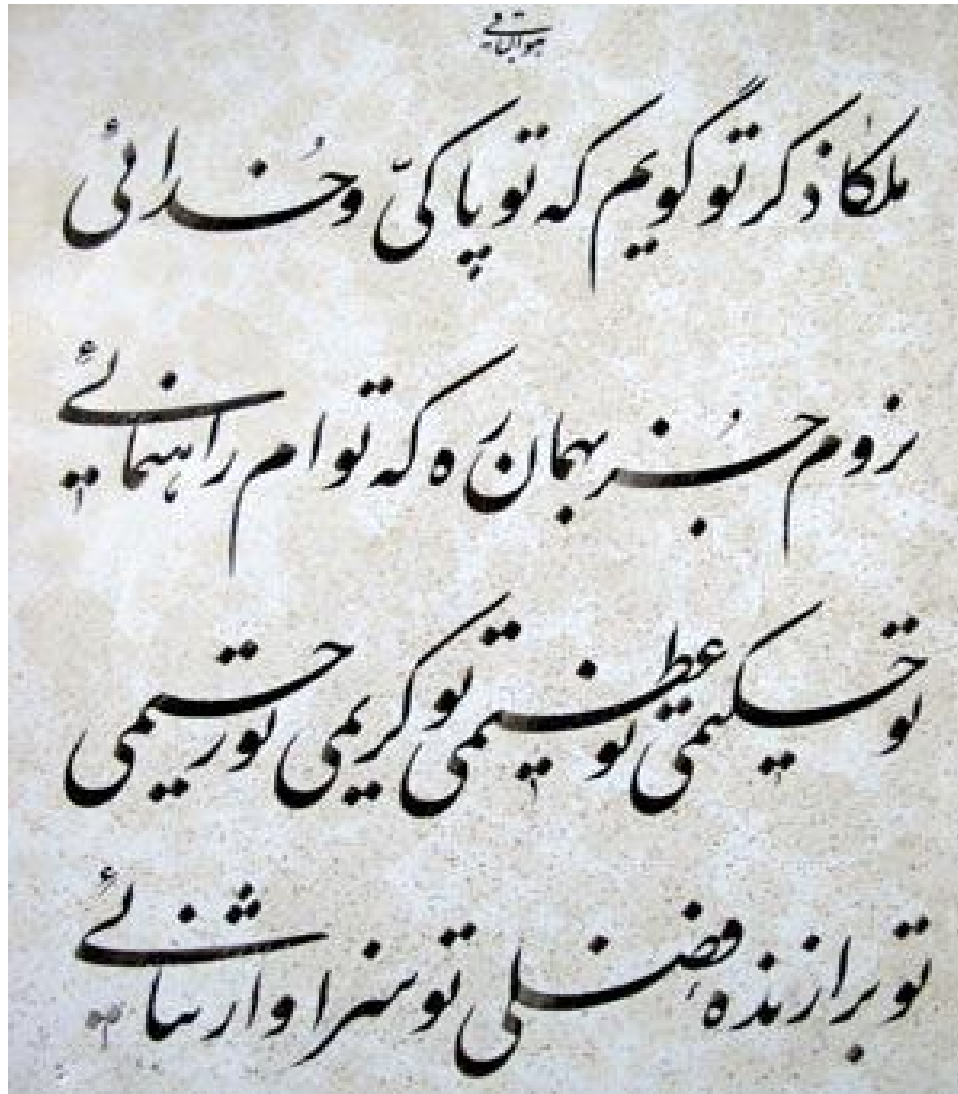


تمرین) فرضیه ای به این صورت بیان شده است: " شصت درصد مدیران سازمان دارای سبک مدیریت دستوری هستند" محقق ۲۰۰ نفر مدیر را بصورت تصادفی انتخاب کرده که بطور متوسط نیمی از آنها دارای سبک دستوری هستند. فرضیه فوق را در سطح اطمینان ۹۵ درصد آزمون نمایید.





# از توجہ سما سپاسگزارم



مدرس: دکتر سمیہ عباسی

عنوان درس: آزمون فرض آماری